10. Wronskian ニ就テ.

吉田耕作（阪大）

$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x)$ ヲ一次独立ニシテ且 $\sum_{i=1}^{p} f_i(x) \neq 0$ ナル整函数トスル. $\log|f_i(x)|$ 従ッテ $v(x)=\max_i \log|f_i(x)|$ ハ subharmonic ニナルカラ F. Riesz ノ定理ニヨッテ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta$ ハ $\log r$ ニツイテ convex ニナル. 之ヲ $T(r)$ トヲケバ $p=2$ ノトキ $T(r)+O(1)=T(r,\frac{f_1}{f_2})$ トナリ又一般ニ $T(r)>N(r,\frac{f_j}{f_i})+O(1)$ トナルコトガタヤスクワカル. ココニ $T(r,f), N(r,f)$ 等ハ Nevanlinna ノ導入シタ記号デアル. 之等ノ事実ヲ利用シテ H. Cartan ハ Nevanlinna ノ基本定理ヲ次ノ如ク拡張シタ. Mathematica (1933)

行列 $\|C_{ij}\|$ ($i=1,\cdots,q>p$, $j=1,2,\cdots,p$) ノ p 次ノ subdeterminant ガ全テ 0 デナイトキ $F_i=\sum_{j=1}^{p} c_{ij} f_j$; $i=1,2,\cdots,p$ トスルト

$$(q-p)T(r) < \sum_{i=1}^{q} N'_{p-1}(r,F_i) + S(r),$$

ココニ $N'_{p-1}(r,F_i)$ ハ F_i ノ zero point ヲ其絶対値 r ヲ越エヌモノニツキ $k(\leq p-1)$ ple zero ハ k コニ $l(>p-1)$ ple zero ハ $p-1$ コニ数ヘタ個数ヲ x デワリテ 0 カラ r 迄積分シタモノデアル. $S(r)$ ハ其 interval ノ sum ガ有限デアル如キ r ノ値ヲノゾキ $O(\log T(r)+\log r)$ ヲ満足スルモノ.

Cartan ノ証明ハ奇麗デアルガ幾分 übersichtlich デナイ感ガアル. 筆者ハ $f_1,\cdots,f_p$ ノ Wronskian ヲ $W(f_1,\cdots,f_p)$ トスルトキ

$$\overline{W}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{0,\ |x|=r}^{2\pi} W(f_1,\cdots,f_p)\,d\theta$$

ヲ上下ニ abschätzen スルトイフ方針デ計算スルト上定理ガ natural ニ出テクルコトヲ示シタイ. Cartan ノ証明ヲ少シ modify スル丈デアルガ

Cartan ノヨリ幾分拡張サレタ形ノ結果ヲ得ル.

証明. 1 カラ q 迄ノ integer ヲ任意ノ順序ニ並ベタモノヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p$ トスレバ $\|C_{ij}\|$ ニ対スル仮定カラ $W(f_1,\cdots;f_p) \equiv C(\alpha)\, W(F_{\alpha_1},\cdots;F_{\alpha_p})$. ココニ $C(\alpha)$ ハ α ノトリ方ノミニヨッテ定ル常数 $(\neq 0,\infty)$ デ x ニ independent. 従ッテ

$$W(f_1,\cdots,f_p) \equiv F_1\cdots F_q \frac{C(\alpha)\, W(F_{\alpha_1},\cdots,F_{\alpha_p})}{F_{\alpha_1}\cdots F_{\alpha_p}} \equiv F_1\cdots F_q H.$$

ココニ $H(x)$ ハ suffix α ニ independent デ且次ノ如クカケル.

$$H \equiv C(\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{F'_{\alpha_1}}{F_{\alpha_1}} & & \frac{F'_{\alpha_p}}{F_{\alpha_p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{F^{(p-1)}_{\alpha_1}}{F_{\alpha_1}} & & \frac{F^{(p-1)}_{\alpha_p}}{F_{\alpha_p}} \end{vmatrix} \div F_{\alpha_{p+1}}\cdots F_q$$

Abschätzung nach oben. 各 x ニ対シ $|F_{\alpha_1}| \leqq |F_{\alpha_2}| \leqq \cdots \leqq |F_{\alpha_q}|$ トシ (即チ α ハ x ノ函数) アラユル $|C(\alpha)|$ ノ max ヲ C トスルト

$$W(r) \leqq \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underset{x=re^{i\theta}}{} \log|F_i|\,d\theta + \log C + \sum \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underset{x=re^{i\theta}}{} \overset{+}{\log} \left\| \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{F^{(p-1)}_{\alpha_p}}{F_{\alpha_p}} \end{matrix} \right\| d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underset{x=re^{i\theta}}{} \log|F_{\alpha_{p+1}}\cdots F_{\alpha_q}|\,d\theta$$

但シ $\overset{+}{\log}|a| = \begin{cases} \log|a|, & |a|>1 \\ 0 & |a|\leqq 1 \end{cases}$ 又, 右辺第三項ノ Σ ハアラユル α ノトリ方ニ對スル sum ヲ表ハス. 従ッテコノ第三項ハ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underset{x=re^{i\theta}}{} \overset{+}{\log}\left|\left(\frac{F_i}{F_j}\right)^{(\nu)} \Big/ \frac{F_i}{F_j}\right| d\theta$ ノ如キモノノ有限コノ sum デ上カラ abschätzen サレル. 従ッテ Nevanlinna ノ定理ニヨリ其 interval sum ガ有限ナル如キ r ノ値ヲ除イテ此第三項

$$O\Big(\log r+\log\sum_{i,j}^{i\neq j} T\big(r,\tfrac{f_j}{f_i}\big)\Big)<O(\log r+\log T(r))$$ —冒頭ノ注意.

又 $\|C_{ij}\|$ ニ対スル假定及ビ α ノエラビ方カラ

$$|f_i|\leqq K(C)\,|F_{\alpha_j}|\ ,\quad i=1,\cdots,p\ ;\ j=p+1,\cdots,q$$

ココニ $K(C)$ ハ $\|C_{ij}\|$ ノミニヨッテ定ル正数デ x ニ independent. 従ッテ

$$(q-p)T(r)\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\x=re^{i\theta}}}^{2\pi}\log|F_{\alpha_{p+1}}\cdots F_q|\,d\theta\ .$$ 故ニ

$$\varpi(r)\leqq\sum_{i=1}^{q}N(r,F_i)-(q-p)T(r)+S(r)\ .$$

Abschätzung nach unten. q, $\|C_{ij}\|$ 等ハ上ノモノト異ナッテモヨイ。但シ同ジ條件ヲ満足スルコト. 記述ノ簡單ノ為ニ α 等ニツイテモ上ト同ジ notation ヲ用フルガ.

$$\varpi(r)=\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\x=re^{i\theta}}}^{2\pi}\log|F_i|\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\x=re^{i\theta}}}^{2\pi}\log\Big|\frac{1}{H}\Big|\,d\theta$$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{1}{H}\right|d\theta\leqq O(1)+N\big(r,\frac{1}{H}\big)$. ココニ $N\big(r,\frac{1}{H}\big)$ ハ meromorphic function $\frac{1}{H}$ ノ $|x|\leqq r$ ニ於ケル zero point ノ数ヲ logarithmic ニ積分シタモノデアル. α ノトリ方カラ $F_{\alpha_{p+i}}$, $i>0$ ハ 0 ニナラヌカラ コノ zero point ノ数ハ H ノ分母ノ determinant ノ pole ノ数ノミヲ調ベルトヨイ. ヨッテ $N\big(r,\frac{1}{H}\big)\leqq\sum_{i=1}^{q}N_{p-1}(r,F_i)$, 即チ

$$\varpi(r)\geqq O(1)+\sum_{i=1}^{q}\big(N(r,F_i)-N_{p-1}(r,F_i)\big)$$

斯クテ Cartan ノ定理ノ拡張ヲ得ル. — rôle de Wronskien

$$(q-p)T(r)\leqq\sum_{i=1}^{q}N(r,F_i)-\varpi(r)\ .$$

念ノ為ニ $N(r,F_i)$ ハ $|x|\leqq r$ ニ於ケル F_i ノ zero ノ数ノ log. integration デアリ Jensen ノ公式ニヨッテ $\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\x=re^{i\theta}}}^{2\pi}\log|g(x)|\,d\theta=O(1)+N(r,F_i)-N\big(r,\frac{1}{F_i}\big)$

正誤 — 第三号 Wronskian ニ就テ (吉田耕作)

3頁1行 $\sum_{i=1}^{p} f_i(x) \neq 0$ ヲ $\sum_{i=1}^{p} |f_i(x)| \neq 0$ ニ.

3頁9行 $i=1,2,\cdots,p$ ヲ $i=1,2,\cdots,q$ ニ

4頁2行 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ ヲ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ ニ

4頁6行 $\dfrac{C(\alpha)\overline{W}(F_{\alpha_1},\cdots,F_{\alpha_p})}{F_{\alpha_1}\cdots\cdots F_{\alpha_p}}$ ヲ $\dfrac{C(\alpha)\overline{W}(F_{\alpha_1},\cdots,F_{\alpha_p})}{F_{\alpha_1}\cdots\cdots F_{\alpha_q}}$ ニ

最後行 $O(1)+N(r,F_i)-N(r,\frac{1}{F_i})$ ヲ $O(1)+N(r,g)-N(r,\frac{1}{g})$ ニ

前号取急イダ為ニ浄書シテナイ原稿カラ写シタ為コンナニ多クノ正誤ヲシナケレバナラナイ様ニナツテ申訳アリマセンデシタ — 吉田耕作